

# **YUPANCHIS**

## **La matemática inca y su incorporación a la clase**

**Yonit Bousany**  
**12-05-2008**

## Contenido

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>I. El problema y mi plan de trabajo</b>	<b>2</b>
<b>II. La etnomatemática</b>	<b>3</b>
<b>A. ¿Qué es la matemática?</b>	<b>3</b>
<b>B. Una definición de la etnomatemática</b>	<b>4</b>
<b>C. ¿Por qué la etnomatemática?</b>	<b>5</b>
<b>D. Experiencias de la matemática</b>	<b>6</b>
<b>III. La escuela Wiñaypaq</b>	<b>7</b>
<b>A. Información sobre la escuela</b>	<b>7</b>
<b>B. Mi rol como voluntaria</b>	<b>9</b>
<b>El sistema de números en el lenguaje Quechua</b>	<b>10</b>
<b>I. Los números quechuas</b>	<b>10</b>
<b>II. El uso social de los números</b>	<b>12</b>
<b>La matemática inca</b>	<b>12</b>
<b>I. Los quipus</b>	<b>13</b>
<b>A. Los quipus como registros lógico-numéricos</b>	<b>13</b>
<b>B. Representación de números en un quipu</b>	<b>15</b>
<b>C. Desarrollando un problema con los quipus</b>	<b>16</b>
<b>II. La yupana</b>	<b>17</b>
<b>A. La yupana y los procesos aritméticos</b>	<b>17</b>
<b>B. La suma con la yupana</b>	<b>19</b>
<b>C. La resta con la yupana</b>	<b>20</b>
<b>D. Otros procesos aritméticos con la yupana</b>	<b>22</b>
<b>III. La taptana numérica</b>	<b>23</b>
<b>A. La taptana y representación de números</b>	<b>23</b>
<b>B. La suma y la resta con la taptana</b>	<b>24</b>
<b>Tradiciones de educación en el imperio inca</b>	<b>26</b>
<b>La matemática en la vida diaria</b>	<b>26</b>
<b>I. El trabajo agricultura y el calendario</b>	<b>26</b>
<b>II. La economía</b>	<b>27</b>
<b>III. La matemática de diseño</b>	<b>27</b>
<b>Mis clases en Wiñaypaq</b>	<b>28</b>
<b>I. La taptana</b>	<b>29</b>
<b>II. Los quipus</b>	<b>32</b>
<b>III. Los tokapus</b>	<b>34</b>
<b>IV. La yupana</b>	<b>35</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>36</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>38</b>

## INTRODUCCIÓN

### I. El problema y mi plan de trabajo

YO: ¿Qué te gusta más aprender en la escuela?

ESTUDIANTE: ¡Todo!

YO: ¿La matemática también?

ESTUDIANTE: Sí, también.

Este diálogo tuve con una estudiante de quinto grado de la escuela intercultural-bilingüe Wiñaypaq, a quien veía cada día luchando con la matemática. Sus respuestas señalan bastante sobre su experiencia escolar, especialmente porque, desafortunadamente, la mayoría de experiencias de niños quechua-hablantes en clases de matemática son indeseables en el Perú. Por una variedad de razones, niños peruanos quechua-hablantes raras veces suceden en alcanzar un nivel avanzado en el aprendizaje de las Matemáticas. Podemos atribuir este hecho a variables sociológicos, políticos, lingüísticos y/o económicos, pero no, como es una opinión popular, a una falta de una fuerte base de conceptos matemáticos en las tradiciones quechuas. Mi objetivo en este ensayo es mostrar como, manejando un nuevo entendimiento de lo que llamamos la etnomatemática, niños quechua-hablantes puedan emplear sus propias tradiciones matemáticas y desarrollar su potencial tanto como cualquier otro niño. Doy ejemplos de lecciones que yo he usado en el aula para enseñar la matemática, con métodos menos tradicionales pero tantos exitosos. Con la etnomatemática, se aplica para niños quechua-hablantes clases de matemática que vinculan sus tradiciones y aprendizajes desarrollados dentro de su propia cultura con el currículo de la escuela, con resultados muy ventajosos.

## II. La etnomatemática

### A. ¿Qué es la matemática?

Antes de empezar a entender lo que es la etnomatemática, tenemos que reevaluar lo que entendemos del término “matemática” en general. Como señala Claudia Zaslavsky, “Todos nosotros, nutridos desde el interior de la tradición de la cultura occidental, tendemos a pensar sobre las Matemáticas como un único florecimiento de la cultura europea... Sin embargo, evidencias culturales sugieren que la Matemática ha florecido en todo el mundo, y que los niños se benefician de ella aprendiendo como prácticas matemáticas provenientes de las necesidades reales y deseos de las sociedades.” (Zaslavsky 1989 en Ubillús 1995:100) Esto es un punto muy importante; que la matemática será definida no sólo desde las tradiciones de la cultura occidental, sino de una manera que pueda abarcar un entendimiento global. El Manual de Lógico Matemático de 2008 para la educación primaria en Perú define la base de la matemática como nociones de objetos, espacio, tiempo, conjuntos y subconjuntos, clasificación, seriación, y número. (Sáenz 2007:15-21) Jerry Lipka, un profesor que ha trabajado con pueblos indígenas en Alaska, define la matemática como medir, diseñar, contar, navegar y ubicar, jugar, y explicar. (1994) La matemática entonces se trata de relaciones entre cuerpos en el mundo y de uno a su propio cuerpo, incluyendo los tópicos de la clasificación, numeración, geometría, medidas, y resolución de problemas.

Esta definición nos debe servir para pensar de la matemática en el contexto de cualquiera cultura, escrita u oral. Eran muy pocas culturas que llegaron a desarrollar un sistema de la escritura sus mismas, pero cada cultura en el mundo tiene y tenía sistemas para relacionarse con el mundo. Es decir, cada cultura desarrollaba sistemas de la matemática. Con la etnomatemática, la meta es descubrir, revivir, e incorporar estos

sistemas en la pedagogía de hoy. Las implicaciones incluyen una revitalización y redescubrimiento de tradiciones, y una mejor experiencia escolar para niños en todo el mundo.

### **B. Una definición de la etnomatemática**

La etnomatemática, finalmente, es un “medio para mejorar el aprendizaje de Matemática, superando la alienación cultural.” (Ubillús 1995:102) El padre del término, el profesor brasileño Ubiratan D’Ambrosio, la definió como “El arte o técnica de entendimiento, explicación, conocimiento, abordaje y dominio del contexto natural, social y político, que se sustentan sobre los procesos de contar, medir, clasificar, ordenar e inferir.” (Ubillús 1995:102) Otra matemática, Marcia Ascher, define el término como “El estudio de las ideas matemáticas de gente no letrada.” (Ubillús 1995:101) Al final, la etnomatemática es nuestra manera de siempre recordar que “El acto natural del pensamiento es grandemente modificado por la cultura... hay muchos diferentes y legítimos modos de pensamiento.” (Hall 1977 en Ubillús 1995:100-101)

Hay que clarificar que la etnomatemática no cuestiona el carácter platónico de la matemática, que la matemática es una ciencia con ciertas propiedades que no varían en todo el mundo. La etnomatemática solamente sirve para destacar el hecho de que llegamos a descubrir y entender estas propiedades de maneras diferentes, que crecen de nuestras experiencias culturales y lingüísticas.

La etnomatemática tenemos que desarrollar como parte del currículo escolar y empezar la enseñanza de la base de los conceptos matemáticos empleando métodos culturalmente específicos. La etnomatemática tiene resonancia especial en el caso de

estudiantes de culturas orales, para quienes la etnomatemática es importante para vincular su potencial desarrollada en el hogar con su aprendizaje en la escuela.

### **C. ¿Por qué la etnomatemática?**

Cada niño, al llegar a la escuela, ya tiene una potencial desarrollada. Por el único hecho de haber vivido dentro de una cultura, en un hogar con otras personas, y con experiencias de relacionarse con su cuerpo y con el mundo exterior, el niño ha aprendido bastantes principios de la matemática. La meta para sus profesores, entonces, es usar este sistema que ya ha desarrollado el niño solamente por vivir dentro de una cultura específica, y añadir a sus experiencias para que pueda aprender aun más. La cultura en que vive el niño es de la máxima importancia en cuanto a cómo desarrollar su potencial matemática. Cuando digo “cultura”, voy a usar la definición del antropólogo Clifford Geertz, quien escribió, “[culture is]... a historically transmitted pattern of meanings embodied in symbols, a system of inherited conceptions expressed in symbolic forms by means of which men communicate, perpetuate, and develop their knowledge about and attitudes toward life.”<sup>1</sup> (1973: 89) Esta definición de cultura da mucha atención a los símbolos de comunicación, lo que podemos llamar el lenguaje. Tiene buena razón, porque el lenguaje propio de una persona le da una visión del mundo, y una manera de pensar. Por su cultura, individuos perciben, aclaran, y comunican con el mundo, que es buena parte de la matemática. Entonces, el idioma en que explican sus ideas matemáticas está tan vinculado a la cultura de la matemática que desarrollan por percibir el mundo. Por eso, para la enseñanza de la matemática formal- es decir, la enseñanza en el lenguaje de la matemática- hay que primero

---

<sup>1</sup> Traducción libre: “[La cultura es]... una serie transmitida históricamente de sentidos expresados en símbolos, un sistema de concepciones heredadas expresados en formas simbólicas con que la gente comunica, perpetua, y desarrolla su conocimiento de y actitudes a la vida.”

fijar en la cultura de la matemática entre que el niño toma sus experiencias. Para desarrollar el potencial matemático de un niño que viene de una cultura oral, hay que enseñar sistemas de culturas orales, y el aprendizaje tiene que proceder de manera oral.

La etnomatemática tiene ventajas en cuanto a la confianza del estudiante para su aprendizaje, y la importancia para la matemática que le da. En una manera, la etnomatemática vincula la matemática con la historia. El niño, al aprender métodos de sus antepasados, fija en sus propias tradiciones y su propia historia. Especialmente para una cultura de veneración a lo pasado, aprendiendo los métodos de los antepasados les da a los estudiantes una cierta confianza para aprender. Además, el aprendizaje con métodos tradicionales hace la matemática una cosa personal y relevante, y no algo del Occidental nomás. La etnomatemática inspira al estudiante a pensar sobre la matemática como práctica y también divertida, y a dar importancia a su estudio.

Además, como escribieron los editores del libro *El Río de la Tradición Oral*, la escuela es el “lugar más adecuada para recuperar, preservar, y transmitir la tradición oral, asegurando la continuidad.” (2005: introducción) Es importante que el docente pueda integrar para sus estudiantes “los aprendizajes adquiridos en el hogar y los impartidos en la escuela.” (ibid) Y como los aprendizajes en los hogares se realizan a través de la observación, es decir de forma oral, la educación en la escuela también tiene que integrar lecciones de formas orales.

#### **D. Experiencias de la matemática**

En mi experiencia, ha sido un esfuerzo encontrar a un peruano que diga que le gustaba la matemática como niño. Lo usual era que uno diga que la aguantó con bastante

aversión, o que la odiaba completamente. Replico el cuento de un amigo sobre su experiencia escolar con la matemática, para pensar sobre por qué será.

Juan (su nombre ha sido cambiado), asistía al colegio en los años noventa, en la ciudad de Abancay. Era un niño pobre, sin muchos recursos y sin ayuda por parte de sus padres, pero bastante hábil y con ganas de aprender. Sin embargo, nunca llegó a gustarle la matemática. ¿Por qué será? Sus tareas eran páginas de ejercicios tomadas de un libro, y en el aula también, el profesor pondría ejercicios en la pizarra, para que los estudiantes los desarrollen durante toda la clase. El profesor llamaría a Juan para hacer problemas en la pizarra, y cuando Juan llegaría al frente del aula, se olvidaría cómo hacerlos. Cuando miraría a la pizarra sin saber cómo empezar, el profesor le gritaría, “¡Apúrate ya!” Otros estudiantes empezarían a gritar unos números, que Juan pondría como soluciones, sin saber si se hubiera equivocado. Si sí, el profesor agarraría su cabeza, y la golpearía en la pizarra. Cuando llegaría a su casa, Juan podría hacer todas sus tareas fácilmente. Sabía que la matemática no debería ser así... y por suerte, con esfuerzos individuales, llegó a conocer a la matemática por si mismo. Ahora, es estudiante de la ingeniería electrónica en la UNSAAC. ¿Pero cuántos estudiantes han tenido experiencias como las de Juan? ¿Y cuántos de ellos nunca llegarán a realizar su potencial? En la definición de lo que es la matemática, es demasiado frecuente que olvidamos la parte que dice “jugar”.

### **III. La escuela Wiñaypaq**

#### **A. Información sobre la escuela**

La escuela intercultural-bilingüe (quechua-castellano) Wiñaypaq se abrió recién en 2008 en la Comunidad Campesina Indígena de Wayllarqocha, provincia de Cusco, a unos kilómetros de Pukapukara y Tambomachay. Hay cuarenta niños y niñas asistentes a la

escuela, veintiuno de ellos en el primer grado hasta el sexto, y el resto menores. La escuela es totalmente gratuito para los estudiantes, y muchos de ellos vienen becados de diferentes comunidades campesinas como Qaqaqollo, Huandar, P'isaq, el distrito de Lamay, Taray y de la Nación Q'eros de Paucartambo. La mayoría de los estudiantes son bilingües quechua-castellano, y la profesora de primero-segundo es también bilingüe quechua-castellano. La escuela primaria consiste en tres clases, cada uno con su propio profesor, de primero-segundo, tercero-cuarto, y quinto-sexto, las primeras dos con ocho estudiantes y la última con cinco. La filosofía de la escuela, en sus propias palabras, es así:

“En nuestro medio, lamentablemente, todavía en muchos centros educativos estatales y aun privados, se aplica la violencia física y el temor, así como un estilo machista y vertical como estrategia para manejar a los estudiantes. En el caso de nuestra Escuela Wiñaypaq, nuestros padres y madres de familia se han afiliado libremente, por la simpatía que sienten hacia el tipo de educación alternativa que se brinda en nuestra escuela: una educación en la que los niños desarrollan una relación de respeto interpersonal, intercultural, entre géneros y hacia la Naturaleza, recogiendo los valores de la propia cultura de origen, raza, idioma y dando respuestas prácticas y efectivas a la situación y necesidades socio – económicas de sus familias de origen. Una educación en la que venimos usando metodologías basadas en ir de la práctica a la teoría, de la acción a la sistematización, de lo concreto a lo abstracto, de lo personal a lo impersonal, realizando actividades como la agricultura ecológica, respetando el calendario agrícola y ritual propios de la realidad local, dando mucha importancia al arte, la música, la danza, la pintura, la cerámica, el teatro, la literatura, la comunicación social, etc. y, principalmente, priorizando el buen trato, la no violencia, la equidad y el respeto a los derechos de los niños y niñas. La filosofía de la escuela contempla no sólo el respeto al idioma, sino a todos los rasgos de la cultura, la promoción de valores y también el desarrollo de la conciencia ecológica a partir de la relación sagrada del ser humano con Pachamama, de acuerdo a la Cosmovisión Andina de la cual provienen la mayoría de los educandos. Para todo esto la escuela mantiene una relación con sus comunidades de origen, participando en algunas de sus festividades, organizando a los padres y madres de familia, participando en las actividades productivas y rituales del pastoreo, la siembra, etc.

La promoción de valores es uno de los pilares fundamentales de nuestra filosofía educativa. Entre estos valores está el desarrollo de la autoestima, la identidad personal, familiar y cultural, así como la tolerancia, el respeto y la interacción y el trabajo solidario entre culturas, en pos del bien común. Precisamente por ello, considerándonos parte de una sociedad multicultural, promovemos en nuestra escuela una interacción constructiva, positiva y real entre los diferentes sectores que conforman dicha sociedad. La interculturalidad no es simplemente la presencia de rasgos culturales vernaculares en una escuela sino principalmente el tipo de relación que promovemos entre las culturas. A esta filosofía... contemplamos las relaciones interpersonales, interculturales y con nuestro medio ambiente y nuestro patrimonio cultural. Los resultados de nuestra labor se vienen demostrando en la manera como los niños y niñas se van integrando y van aprendiendo a relacionarse entre culturas diferentes con tolerancia, respeto y solidaridad, proyectando este tipo de comportamientos positivos también a sus propias familias de origen. Además, ya que de esta manera los niños y niñas ya no sufren las tensiones del conflicto

intercultural tan común en nuestra sociedad, su rendimiento académico es también mucho más satisfactorio.” (<http://winaypaq.org/about>)

La escuela Wiñaypaq es parte de la comunidad de Wayllarqocha, una compañera que vive con los niños, dentro de su cultura. Las relaciones con las familias son muy importantes, y el aprendizaje en el aula emplea todas las experiencias de los estudiantes, dentro y afuera. La filosofía de la escuela es mantener la tradiciones vivas, no porque suena bonito sino porque entienden que sus tradiciones ayudan a los niños en su aprendizaje y vida. Dentro de esto es también el mantenimiento del lenguaje quechua, incorporando su uso en cuanto puedan. Porque una sola profesora es bilingüe quechua-castellano, esto es a veces un desafío, y el uso de quechua es parte de la filosofía que todavía tienen que seguir desarrollando. Para mi proyecto también, el uso de castellano en vez de quechua produjo unos cambios en cuanto a las clases; enseñé métodos quechuas, pero no en quechua, y entonces tenía que estar satisfecha con pensamiento en castellano sobre conceptos originalmente desarrollados en quechua. No podía hablar de la intersección de lenguaje y pensamiento sino del éxito de enseñar con tradiciones culturales, en cualquier idioma.

## **B. Mi rol como voluntaria**

Yo llegué a la escuela Wiñaypaq la segunda semana en Abril como profesora voluntaria. Empecé a trabajar con tercer a sexto grados, mi plan enseñarles la matemática empleando métodos quechuas. La enseñanza, desafortunadamente, fue en castellano, pero todas mis lecciones vinieron de tradiciones incas de la aritmética, geometría, y estadística. Pensé que estas clases serían divertidas para los estudiantes, y relevantes a sus experiencias. Esperé que los estudiantes y profesores también empiecen a pensar diferente sobre qué era la matemática, y a incorporar juegos y lecciones históricamente valubles. Como escribió el

editor de la revista *Pueblos Indígenas y Educación*, “Las lenguas indígenas americanas puedan desarrollar una terminología matemática que, al tiempo que sirva para expresar las necesidades actuales, respete la tradición y la indiosinracia lingüística y cultural de los pueblos indígenas.” (1988: introducción) Mi plan para mis clases en Wiñaypaq era mostrar a los estudiantes y profesores también la necesidad de hacer exactamente esto.

## **EL SISTEMA DE NÚMEROS EN EL LENGUAJE QUECHUA**

### **I. Los números quechuas**

Para llegar a entender un poco de una cultura de matemática, primero es importante saber sobre el lenguaje de la matemática y la ontología de los números. Para la cultura quechua, este lenguaje es el quechua y debemos entender el lógico de los números dentro del lenguaje antes de poder entender los que es la aritmética para sus hablantes. El quechua tiene palabras específicas (lo que llamamos protolexemas<sup>2</sup>- una palabra no construida por otras) para cada número uno a diez más los múltiples de diez, cien, mil, y diez mil o millón. Estas son (en el dialecto de Cusco):

1	huk
2	iskay
3	kinsa
4	tawa
5	pishqa
6	soqta
7	qanchis
8	pusaq
9	esqon

---

<sup>2</sup> Vea al artículo por Guido Pilares (2005), “Los sistemas numéricos del quechua y el aimara”

10	chunka
100	pachak
1.000	waranqa
10.000	hunu

(hoy día, *hunu* es más conocido como la palabra para millón, es decir,  $10^6$ )

Para los otros números, los forman con un sistema de reglas gramaticales. Siguiendo el formato del lingüista Guido Pilares, llamamos al base (10, 100, 1.000 etc.) el regente y el otro número el regido. Las reglas dictan que la forma regente-regido sea aditiva y la forma regido-regente multiplicativo. Es decir, *chunka iskay* sería doce pero *iskay chunka* veinte. Además, la mayoría de dialectos de quechua usan el sufijo –YOQ “con” para añadir las unidades. Pegado a un número que termina en consonante, este sufijo sea –NIYOQ. Entonces, doce sería no *chunka iskay* sino *chunka iskayniyoq*. 211, por ejemplo, es *iskay chunka chunka hukniyoq*, y 3456 *kinsa waranqa tawa pachak pishqa chunka soqtayoq*. Hay dos reglas adicionales que guían estas formaciones, una que cuando hay dos potencias de diez, el regente es el mayor, y dos, que nunca se yuxtapone un numeral a si mismo (en este caso, no supiera si añadir o multiplicar- por eso, cada número que es un número cuadrado tiene que ser un protolexema, como *chunka chunka* que es *pachak*).

Tenía una estudiante quechua-hablante que me habló muy emocionada un día en la clase, diciendo, “¡Profesora! ¡Sé cómo decir diez en inglés! ¡*Ten!*!” “Muy bien,” le dije, “¿y sabes como decir once?” Esta niña pensó un momento y volvió a decirme, “Sí. *Ten one.*” Este es un ejemplo muy bueno de cómo las reglas de su idioma nativa la influyen, porque aplicó a estas reglas a otro sistema (y aun cuando la pregunta fue en otro lenguaje todavía, el castellano). Nuestras lenguas nativas sí influyen nuestro pensamiento, y sí nos ayudan enfrentar problemas nuevas.

## II. El uso social de los números

El uso social es la cosa más importante en que tenemos que fijar en cuanto a los números quechuas, porque los números funcionan sintácticamente y semánticamente en maneras vinculadas a la cultura. Para la gente quechua, los números no son entidades en sí sino cosas que sirven para fines reales. Es decir, la numeración y aritmética funcionan para metas siempre vinculadas a un problema auténtico. En oposición a tradiciones occidentales en que la matemática “pura” es valorada solamente para descubrir propiedades de abstracciones, la matemática quechua es valorada solamente cuando tenga utilidad y una justificación. Escribe el antropólogo Gary Urton en su libro *La vida social de los números*, “De este modo, en la ideología quechua los números no son concebidos como abstracciones cuya naturaleza y relaciones entre sí dependen de los predicados de la lógica pura, como en Occidente. Más bien se les conceptualiza en términos de papeles y relaciones sociales, en particular la familia y el parentesco.” (1997:29)

Tal así, los números tienen funciones en el lenguaje puro metafóricamente. Escribe Urton, “Las características e identidades de los números, tal como se les concibe y formula en la lengua y la cultura quechuas, son predicadas en términos de relaciones e identidades que constituyen y rigen la vida social en las comunidades quechuas. En términos más concretos, las relaciones familiares y los papeles y *status* de parentesco representan los tipos principales de relaciones- como jerarquía, descendencia, sucesión- en términos de las cuales se conceptualiza, organiza, y habla de los números.” (1997:28) Una de las metáforas más importantes es la de par-impar, en que *huk* = “otro” y *iskay* = “pareja”. En la cultura quechua, el mundo tiene que estar en equilibrio, y en sí las cosas tienen que estar en par. Si no, la aritmética funciona para poner las cosas impares con sus parejas- a hacer siempre que uno más uno sea dos.

## LA MATEMÁTICA INCA

Los incas desarrollaron unas herramientas matemáticas únicas que introdujo en esta sección. Los primeros, los *quipus*, *yupanas*, y *taptanas*, primariamente usaban matemáticos de la clase alta, pero al final demuestro cómo era la matemática del pueblo común, quienes, en su trabajo diario, mostraban un gran conocimiento de reglas matemáticas, aunque no sea por nombre.

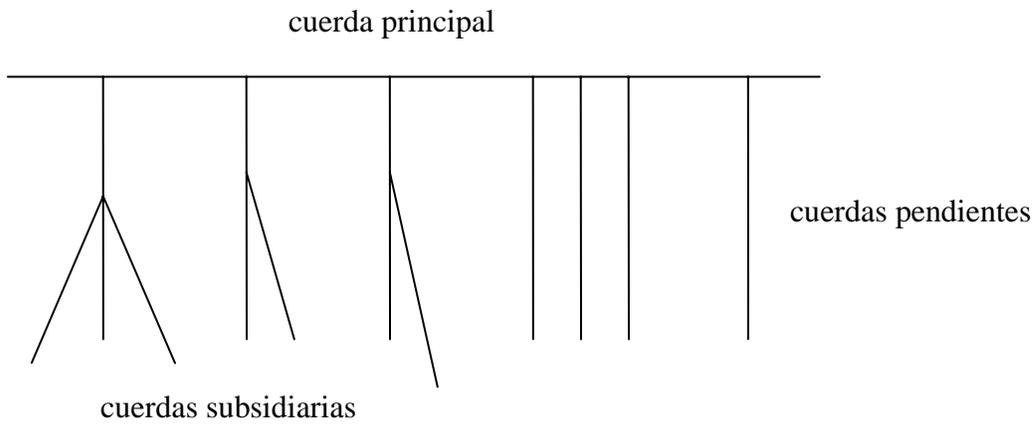
### I. Los *quipus*

#### A. Los *quipus* como registros lógico-numéricos

Los *quipus* son registros matemáticos e históricos que usaban los incas para registrar datos de censos y poder entonces saber los porcentajes adecuados para el tributo, entre otras cosas. El *quipu* es por lo tanto una colección de cuerdas, estas cuerdas de diferentes colores y con nudos que representan los números. Los colores de las cuerdas, la manera de atarlas, la colocación relativa de ellas, los espacios entre cuerdas, los nudos individuales y la colocación relativa de los nudos, los espacios entre nudos- todo esto servía para formular un registro lógico-numérico, un tipo de matriz que podemos entender como un diagrama en forma de árbol. (Ascher 1988:45)

Cada *quipu* empezó con una cuerda principal más gruesa, que se ponía horizontalmente, y de que se suspendía otras cuerdas llamadas cuerdas pendientes. De las pendientes también podía haber otras cuerdas suspendidas, estas llamadas subsidiarias. Esta era la forma básica de un *quipu*, aunque había *quipus* más complicados con subsidiarias de subsidiarias, o cuerdas llamadas superiores que colgaban arriba de la cuerda principal.

(Ascher 1988:47)



El uso de hilos colorados, y el espacio entre grupos de hilos, eran maneras de hacer que el quipu representara un matriz. Por ejemplo, con tres colores que se repiten cuatro veces (así doce cuerdas pendientes en total), se forma el serie  $a_{ij}$  con el  $i$  elemento en el  $j$  grupo, en que  $i=1,2,3$  y  $j=1,2,3,4$ . En forma de tabla esto sería:

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$

O, en otro ejemplo más complicado y más realista, podemos formar un *quipu* con sesenta pendientes en total, agrupados en seis grupos de diez, cada diez con cinco colores repetidos dos veces. Entonces el *quipu* representará el serie  $b_{ijk}$ , con  $i=1,2,3,4,5$ ;  $j=1,2$  y  $k=1,2,3,4,5,6$ .

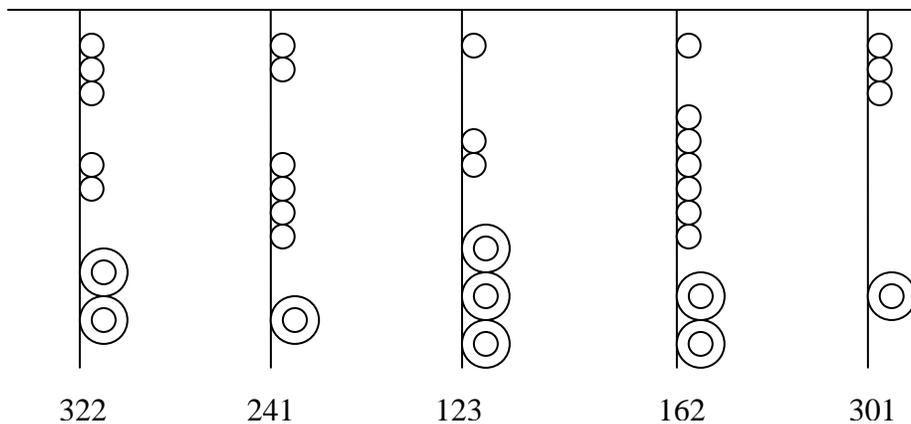
*Quipus* en un dibujo  
por el cronista  
Guaman Poma



### B. Representación de números en un *quipu*

Los números se marcan en los *quipus* atando nudos en las cuerdas pendientes. Hay tres tipos de nudos, sencillo, grande, y de forma de ocho. Los últimos dos sólo se usaban para marcar las unidades- es decir, para los últimos nudos de un número. En esta manera podían poner dos o más números en la misma cuerda, porque el hecho de un nudo grande o en forma de ocho señalaría el fin de un número. (Ascher 1988:48)

Espacios entre grupos de nudos marcan un salto a una potencia de diez. Los nudos más abajo son las unidades, y cada posición consecutiva del extremo de la cuerda es la siguiente multiplicación de diez. Unos ejemplos:



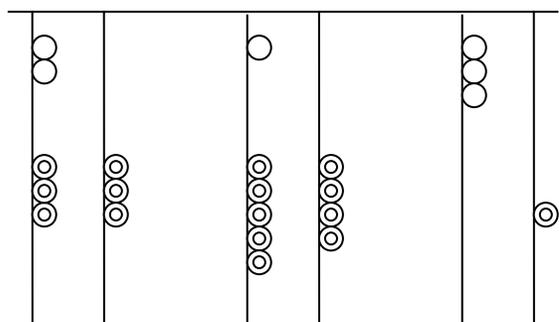
Aquí podemos hacer unas observaciones. Primero, es obvio que los *quipus*, como el sistema de números quechuas y la matemática inca en total, usan la base decimal. Segundo, podemos entender por estos ejemplos de *quipus* algo muy interesante- que los incas sí habían desarrollado un concepto del cero. Como vemos en el último ejemplo de 301, una posición con nada todavía contribuye al total. Como nota Ascher, “nada en si es un número.” (1988:54) Sólo lo que no hay es un símbolo especial para nada. El concepto está.

### C. Desarrollando un problema con los *quipus*

Entonces, empleando lo que sabemos ya, podemos convertir un registro de información de una tabla en un *quipu*. Tomamos una tabla que inscribe la información sobre el número de ovejas y vacas que tienen tres familias.

	1	2	3
ovejas	23	15	30
vacas	3	4	1

Tenemos que representar que tenemos tres familias, dos tipos de animales que todas las familias tienen, y el número de cada uno de estos animales para cada familia. Tomamos seis hilos y los dividimos en tres grupos de dos, los dos hilos para representar ovejas y vacas. Pensamos en un código de colores, como rojo para las ovejas y azul para las vacas. Terminamos con tres grupos de rojo-azul, con nudos en cada cuerda que dicen el número de este animal.



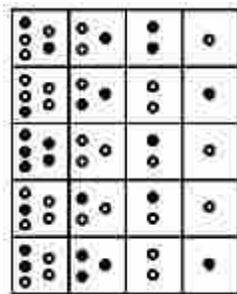
## II. La yupana

### A. La yupana y los procesos aritméticos

La *yupana* es conocida como el ábaco inca, y servía como el complemento del quipu; con la *yupana*, los matemáticos incas podían sumar, restar, multiplicar, y dividir, antes de poder poner esta información numérica en los quipus. En el dibujo del cronista Guaman Poma de Ayala, la *yupana* aparece al lado del *kipukamayoc* (el dueño del *quipu*) como otra herramienta matemática.



La *yupana* al lado del *kipukamayoc* en un dibujo por Guaman Poma



Con la invasión española, mucha de la información sobre la matemática inca y el uso de los *quipus* y la *yupana* fue perdida. Por eso, no hay consenso sobre exactamente cómo usar la *yupana*, sino que historiadores y antropólogos han formado diferentes

conclusiones sobre su uso. En el dibujo arriba, se nota de los círculos negros y blancos en la *yupana*. Hay diferentes conclusiones sobre la significación de estos colores, y también hay diferentes conclusiones sobre el valor de cada cuadrado. Por ejemplo, en una hipótesis (Gilsdorf en Selin 2000: 189), las filas toman valores décimos, y las columnas valores de cinco, así:

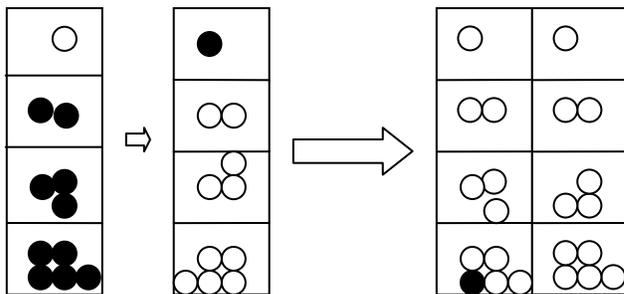
10.000	0 0 0 0 0	0 0 0	0 0	0
1.000	0 0 0 0 0	0 0 0	0 0	0
100	0 0 0 0 0	0 0 0	0 0	0
10	0 0 0 0 0(5x10)	0 0 0 (3x50)	0 0 (2x150)	0 (300)
1	0 0 0 0 0 (5x1)	0 0 0 (3x5)	0 0 (2x15)	0 (30)
	1	5	15	30

Con semillas o piedrecillas, se marcan posiciones para representar los números.

Esta representación es solo una de una variedad de hipótesis, pero aunque no hay una sola manera de leer las *yupanas* incas, la *yupana* ha sido estandarizada en una manera para el uso como herramienta pedagógica en las escuelas. Esto es el método de William Burns, y es lo que se conoce hoy día como el método de enseñar la aritmética con la *yupana* en escuelas peruanas. Primero, a diferencia del uso original, se coloca la *yupana* en posición horizontal. La primera fila es para la “memoria”, y las otras filas para ubicar las semillas que se ayudan a contar. Cada columna tiene un valor que es un múltiplo de diez, y cada círculo tiene un valor de uno multiplicado por el valor de su columna. La *yupana* entonces será así:

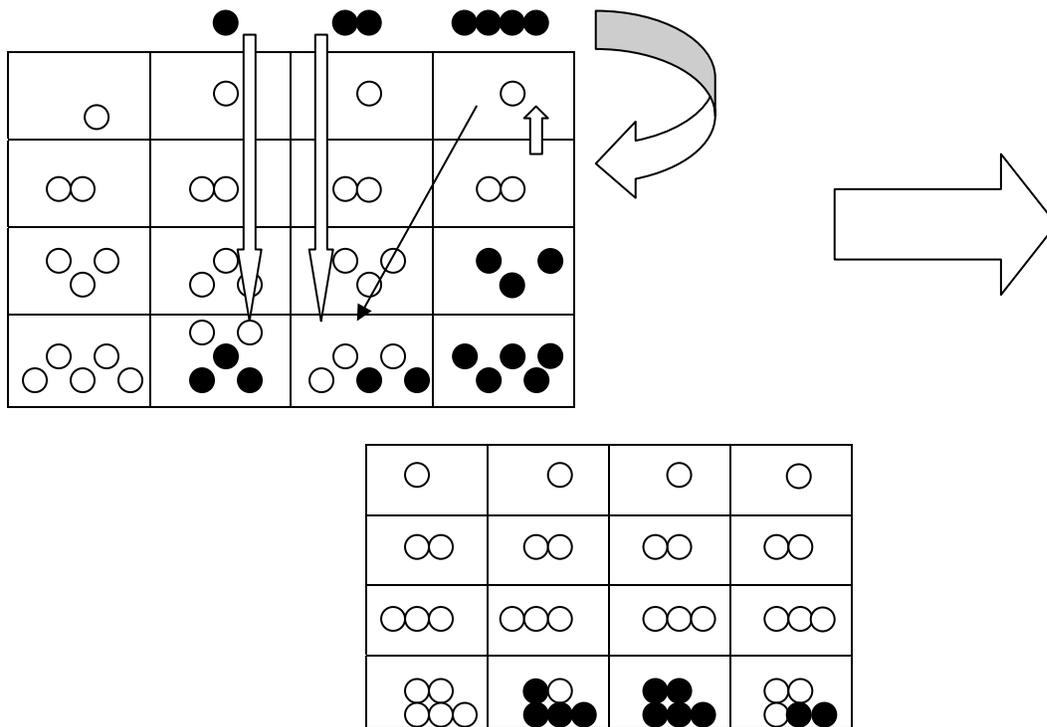
○	○	○	○	○
○○	○○	○○	○○	○○
○○○	○○○	○○○	○○○	○○○
○○○○	○○○○	○○○○	○○○○	○○○○
$10^4$	$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^0$

Siempre se llena la *yupana* de abajo hacia arriba, y cada vez que se llenan los diez círculos de una columna, los barre y se coloca una semilla en la memoria. Esta semilla después se mueve hasta la siguiente columna, así:



### B. La suma con la *yupana*

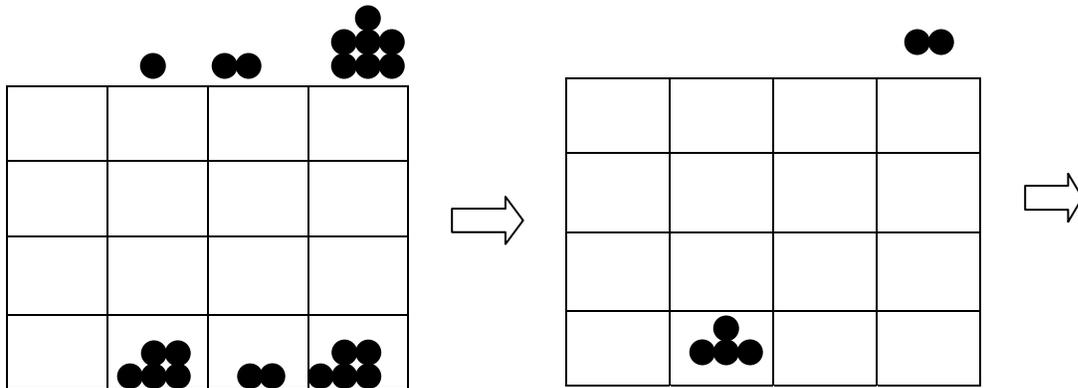
Para hacer sumas con la *yupana*, se representa el primer número en el ábaco y el segundo arriba con semillas. Por ejemplo, hacemos el suma  $328+164$ . Colocamos las semillas en la *yupana* para representar 328, con una semilla arriba de la columna *pachak*, seis arriba de la columna *chunka*, y cuatro arriba de la columna *sapanka*. Añadimos todas las semillas que podemos, hasta que llene una columna de diez, como pasa con la columna *sapanka*. En este caso, borramos todas las semillas de esta columna, ponemos una en la memoria que después transferimos a la columna posterior, y seguimos hasta que no haya ninguna semilla arriba.



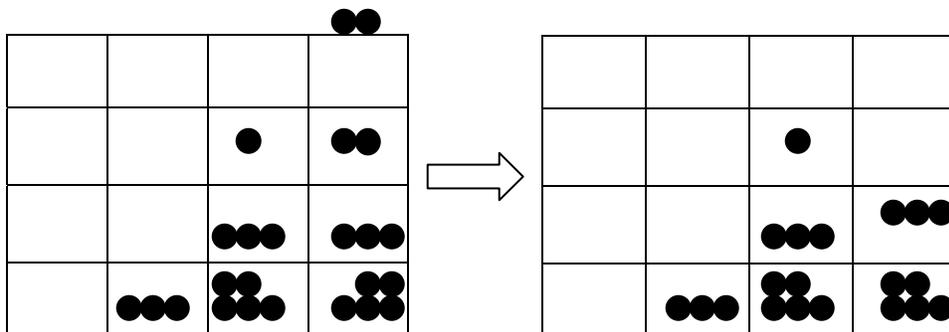
Al final podemos leer que nuestra suma es 452.

### C. La resta con la yupana

Para hacer la sustracción con la *yupana*, también empezamos con el primer número representado en el ábaco y el segundo representado arriba. En este caso, se necesita sacar de cada columna de la *yupana* tantas semillas como que hay arriba. Tomamos el ejemplo de 525-127. En este caso, vemos que las semillas en la columna *sapanka* no aguantan.



Tomamos una semilla de la siguiente columna que las tiene- la columna *pachak*, y añadimos diez semillas a la columna de los *chunka*. Ahora, podemos hacer lo mismo con una semilla de esta columna, y poner diez semillas en la columna *sapanka*. Después de haber hecho esto, hay suficiente semillas en la columna para seguir sacando lo que permanece arriba.



Al final, leemos la resta, 398.

#### **D. Otros procesos aritméticos con la *yupana***

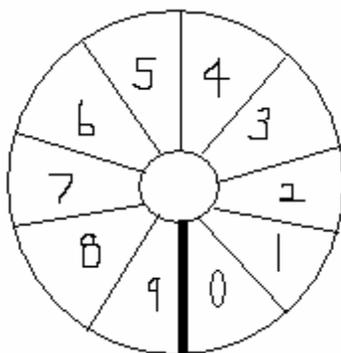
Con la *yupana* también se podía hacer la multiplicación y división, aunque estos procesos eran mucho más complicados, usualmente requiriendo el uso de dos o más *yupanas* a la vez. En todo caso, hay que saber que sí había este conocimiento en la época incaica, y que sí se utilizaba sus propios métodos para resolver la multiplicación y la división.

Además, regresando al dibujo del *kipukamayoc* por Guaman Poma, se nota por la única representación de la *yupana* que en la época incaica el uso de la *yupana* era homogéneo y estandarizado. Escribe Moscovich, “[Había] un modelo estándar utilizado por la administración inca en todo su territorio.” (2006:104) Esto señala que había un sistema uniforme de la aritmética, que hubiera sido muy importante para hacer los censos, que tenían lugar cada cinco años. Guaman Poma escribió sobre el censo, “El Ynca mando contar y numerar ajustar con los indios de este reino,” (en Moscovich 2006:106) y Metraux añade que “toda la población masculina entre 25-40 años... estaba repartida en grupos de 10, 100, 500, 1.000, y 10.000...” (ibid) Aquí también vemos la división decimal, y Moscovich interesantemente hace la observación que esta división de la población es “paralela a la forma jerárquica de los nudos del quipu.” (2006:106) La *yupana* era la calculadora para las cifras totales de los censos, y con ella calcularon también los porcentajes que tenían que pagar cada uno para el tributo al gobierno. En esta manera la *yupana* era irremplazable como herramienta aritmética de la clase de matemáticos en el imperio inca.

### III. La *taptana* numérica

#### A. La *taptana* y representación de números

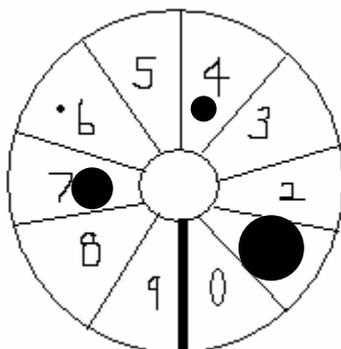
La *taptana* numérica tiene su origen en Ecuador y es otra herramienta inca que usaron para sumar y restar. La palabra *taptana* viene del verbo quechua *taptay*, que significa “saltar”. Agregando el sufijo –NA, que convierte un verbo en un sustantivo “objeto que sirve para X”, la palabra *taptana* entonces significa “objeto que sirve para saltar”. La *taptana* numérica consiste en una rueda dividida en diez partes, cada parte para representar un número de cero hasta nueve, con una doble línea que separa el nueve del cero. Esta doble línea, y la parte que representa cero, son modificaciones más recientes, y cosas que no empleaban los incas en su uso de la *taptana*.



El matemático usa semillas de diferentes tamaños para representar *sapanka* (unidades), *chunka* (décimos), *pachak* (céntimos), *waranqa* (miles), hasta cualquier número de puntos que tienen los números que va a sumar o restar. Como ejemplo, tomamos el número 1746:

W	P	Ch	S
1	7	4	6

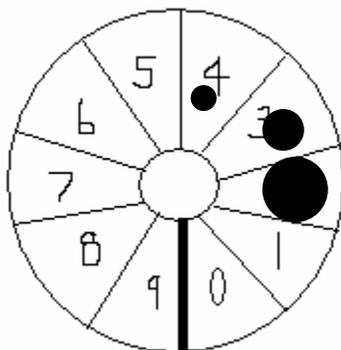
La semilla más grande entonces se pone en uno, la siguiente en siete, la siguiente en cuatro, y la más pequeña en seis.



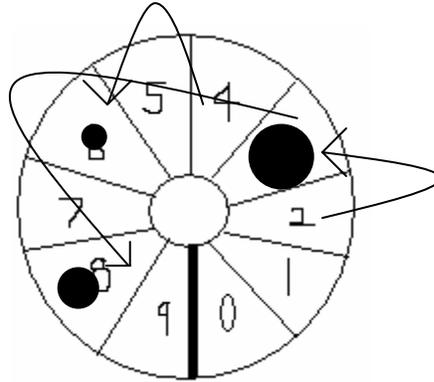
### B. La suma y la resta con la *taptana*

Para aprender a sumar con la *taptana*, otra vez tomamos un ejemplo,  $234+152$ .

Empezamos representando el 234 en la *taptana* así:



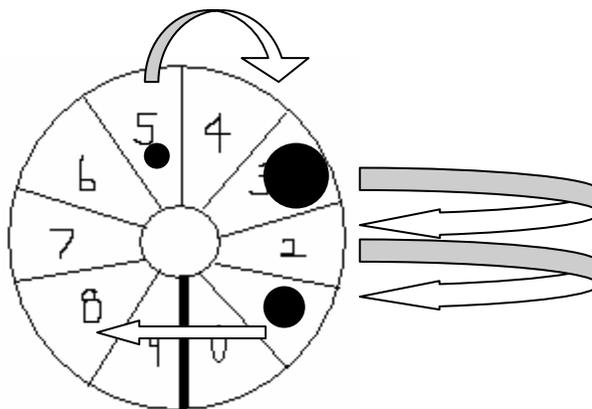
Como que agregamos un número que tiene un *pachak*, cinco *chunka*, y dos *sapanka*, solamente saltamos con las semillas una vez contra del sentido de las agujas del reloj con la semilla más grande, cinco veces con la siguiente, y dos veces con la semilla pequeña que representa los unidades.



Al final podemos leer el número de la *taptana*, que es nuestra suma 386.

A veces cuando uno salta con una semilla, esta semilla pasará la doble línea que separa el nueve del cero. En este caso, la semilla que es la siguiente grande tiene que también moverse una salta. Por ejemplo, tomamos la suma  $28+53$ . Se mueve la semilla *chunka* cinco saltas del dos hasta el siete, y después la semilla *sapanka* salta tres posiciones hasta el uno. Pero como que esta semilla pasó de nueve a cero, pasando la doble línea, la semilla más grande también salta una vez más hasta el ocho. Ahora podemos leer la suma, 81.

La resta es casi igual a la suma pero en la dirección opuesta, en el sentido de las agujas del reloj. Igual a la suma, si una semilla pasa la línea, ahora en la dirección de cero a nueve, la siguiente grande también salta uno. Tomamos el ejemplo de  $315-132$ . Primero, representamos el 315 en la *taptana*. Como estamos ahora restando, saltamos con la semilla grande una salta en el sentido de las agujas del reloj hasta el dos, con la semilla mediana tres saltas hasta el ocho (pero como pasó la línea, movemos la grande también un paso más hasta el uno), y con la semilla pequeña dos veces hasta el tres. Leemos el número que aparece: 183.



## TRADICIONES DE EDUCACIÓN EN EL IMPERIO INCA

La educación en la época pre-incaica era “predominantemente no formal, y se da[ba] de manera muy vinculada a las necesidades y vida de la comunidad.”(Ubillús 1995:16) En la época incaica, había dos tipos de educación- un tipo para la nobleza gobernante, y un tipo para la gente del pueblo. Para los hijos de nobles, que iban al *Yachaywasi* (escuela), les daban clases de astronomía, aritmética, geometría práctica, medicina, religión, trabajo manual, artes, educación física, el manejo de quipus, armas, e historia imperial. Para los del pueblo, la educación era desescolarizado, tomando lugar en la familia y comunidad (*ayllu*). (ibid)

## LA MATEMATICA EN LA VIDA DIARIA

### I. El trabajo agricultura y el calendario

Para el trabajo agricultura, los pueblos indígenas del Perú tenían que saber bastante matemática. La geografía y clima del país exigen un conocimiento de los principales de la ingeniería civil y agricultura, y de la astronomía, la ingeniería para construir sistemas de

irrigación y puentes, y para poder desarrollar un sistema de agricultura en las montañas, y la astronomía para saber los tiempos de la siembra y cosecha. (Gilsorf en Selin 2000:189) Había varios calendarios incas, uno que tenía ciclos de 365 días para el año solar, con meses de 29-30 días, otro calendario solar de doce meses de 30+ días, y simultáneamente, calendarios de años lunares con meses de 23, 24, 26, y 27 1/3 días. (Ascher 1988:41)

## **II. La economía**

Además, los pueblos quechuas trabajaban con la matemática para transacciones mercantiles. Pagaban tributo al imperio inca, y también compartían sus alimentos en sistemas de trueque con otros pueblos. La economía exigía un conocimiento de principales de clasificación y nociones de objetos y conjuntos.

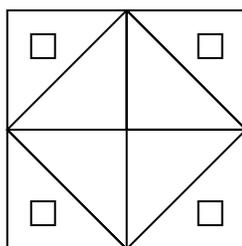
## **III. La matemática de diseño**

Formas geométricas conciben parte de la tradición quechua, desde diseños tejidos hasta las líneas *ceques* y el diseño urbano de la ciudad de Cusco (en forma de puma). Desde el arreglo de las *chakras*, las líneas Nazca, y los *qeros* pintados, la matemática de diseño tiene una historia muy larga y desarrollada.

Los tejidos que hacen mujeres quechuas requieren una enorme manipulación de números de hilos, que las mujeres cuentan no según nombres de números sino “según la mano y las rutinas de movimiento corporal que se han vuelto habituales” (Urton 1997:127). También, escribe Urton, “En todos los ejemplos con los cuales estoy familiarizado, el número de pares de hilos de la urdimbre de todas las *layas* [paneles tejidos que llevan los principales diseños de formas geométricas, animales, etc.] de un *axsu* [falda de mujeres] representa valores unitarios decimales completos (10, 20, 30, etc.). Por lo tanto, podemos

decir que los valores decimales constituyen un fuerte principio organizador en la disposición de los paneles de diseños de estos tejidos.” (1997:132) El proceso de tejer, cuanto como los *quipus* o las *yupanas* o la *taptana*, es basado en el sistema decimal. Las mujeres tejedoras, a menudo parecidas sin conocimiento de la matemática, en realidad hacen enormes calculaciones mentales y usan un sistema de numeración tan desarrollado como cualquier otro.

Los diseños geométricos que aparecen en los tejidos, y a menudo en los qeros también, se llaman *tokapus*.



Ejemplo de un *tokapu*

## MIS CLASES EN WIÑAYPAQ

Yo voluntaba en la escuela Wiñaypaq por cuatro semanas, enseñando estas tradiciones de matemática inca a los niños. Mi primer día era el lunes 14-04-08. Este día fui a la escuela solamente como observadora para introducirme, y para ver un poco de lo que ya sabían los niños de la matemática y unos ejemplos de clases que los profesores habían dado. Los estudiantes de tercero-cuarto y de quinto-sexto ya habían trabajado con *yupanas*, y habían decorado sus cuadernos de matemática con diseños geométricos de *tokapus*. Este primer día, jugamos mucho, todos los estudiantes juntos, incluso muchos juegos de orientación. Estos juegos enseñaron a los estudiantes conceptos como izquierda-derecha,

adentro-afuera, y arriba-abajo, con integración de muchos ejercicios de contar. Para los niños pequeños, estos juegos reforzaron las bases de la numeración, el espacio, y clasificación.

## **I. La taptana**

El martes 15-04, mi segundo día en la escuela, di una clase sobre la *taptana* los cinco estudiantes de quinto-sexto. La *taptana* es poco conocida en Perú, y ni los estudiantes ni los profesores en Wiñaypaq la habían visto antes. Empecé con un dibujo en la pizarra, que todos copiaron. Cuando todos tenían sus *taptanas* en frente, coloqué una semilla y mostré como representar un número con una semilla. Después pregunté: ¿Qué es el número máximo que puedo representar así con una semilla? Los niños no dudaron en responder que nueve. Entonces presenté otra semilla, más grande, que les dije valía diez. Practicamos un rato poniendo números de dos cifras en la *taptana*, y después repetí la pregunta: ¿Qué es el número máximo que podemos representar, ahora con dos semillas? Esta vez tomaron un poco más tiempo en llegar a la respuesta 99. Seguí con otra semilla, aun más grande, que valía cien. Escribí una tabla de valor posicional en la pizarra y empezamos a practicar con números de tres cifras. Cuando llegué a la misma pregunta, ¿Qué es el número máximo que podemos representar con tres semillas?, los estudiantes fácilmente respondieron 999.

Después de la práctica con los números, introduce la suma y después, a los que tenían facultad con la suma, la resta. Practicamos buen rato con sumas y restas que escribí en la pizarra. Al principio, el concepto era difícil para algunos estudiantes, pero después de un poco de práctica, todo volvió más fácil y estudiantes empezaron a pedir más y más problemas, con emoción. Para ellos, la *taptana* significaba jugar con las sumas, y reforcé esto con mucha felicidad.

Otra lección que se desarrolló de las *taptanas* era sobre la división de un círculo en partes iguales. Para dibujar sus propias *taptanas*, los estudiantes tenían que dividir una rueda redonda en diez partes, y por eso empezaron a pensar sobre como cumplir esta tarea. Les guié en darse cuenta de una posibilidad, dividiendo sus círculos en la mitad y después haciendo cinco partes iguales que pudieran copiar a la otra mitad. Esto fue un concepto de la geometría que vinculó muy fácilmente a una clase de aritmética, así juntando varios tópicos de la matemática para diferentes necesidades, y mostrando a los niños el valor de conceptos geométricos.

El jueves 17-04 di mi segunda lección de la *taptana*, esta vez a los estudiantes de tercer-cuarto. Seguí el mismo plan, preguntando sobre números máximos (la primera respuesta para tres semillas fue cien, pero después de llegar a 999 como respuesta correcta ya pudieron responder a cualquier otro número) y practicando un tiempo con la representación de los números antes de enseñar la suma.

Una equivocación que hice para esta clase fue darles a los estudiantes semillas que no variaron mucho en tamaño. Los estudiantes de tercero-cuarto lucharon mucho más con la representación de números en la *taptana* que los otros niños, y creo que fue por eso. Equivocaron con valor posicional hasta que pudieron recordar cual semilla fue cual. Integré a esta clase también una lección de lingüística. Les pregunté sobre lo que era la *yupana*, que ya conocían, y les expliqué que *yupay* era el verbo quechua que significaba “contar”. *Yupana*, entonces, les dije, con la adición del sufijo –NA, significaba “objeto que sirve para contar”. Cuando les dije que *taptay* en quechua significaba “saltar”, ya me pudieron decir lo que significaba *taptana*.

Otro valor de la *taptana* integrada a una clase de matemática era que permitió un poco de color y arte entrar a la lección. Todos los estudiantes les gustó dibujar sus propias

*taptanas*, haciéndolos bonitas con colores y círculos “perfectos”. Otra vez, dibujar círculos y después dividirlos en partes iguales era una lección muy buena en la geometría, sin nada de teoría dicta.

La profesora de tercer-cuarto tomó la oportunidad después de nuestra clase a preguntar a los niños por qué quisiera yo, que tampoco soy peruana, aprender un método así. Empezamos una buena discusión del valor del mantenimiento de tradiciones y de aprender sobre cosas antiguas. Añadí que cosas del pasado no sólo eran para el pasado sino que pudieran ser muy aplicables al presente y que seguían teniendo mucho valor. Para los estudiantes, verme, una extranjera con interés en sus tradiciones, y alguien que aun podía enseñarles sobre ellas, era muy importante. Su profesora les preguntó si iban a enseñar a sus niños sobre la *taptana*, y todos dijeron que sí.

El próximo martes, 22-04, llegué a la escuela con dos sogas, lana, y piedras, y armé una *taptana* bien grande en el suelo. Mi idea fue que los estudiantes, quienes ya conocieron la *taptana*, pudieran jugar con ella, usando sus cuerpos en vez de semillas. La idea sí era buena, y muchos estudiantes durante su recreo formaron líneas para jugar con la *taptana* grande. Interesantemente, se organizaron para representar unidades, décimos, etc. no por altura, como yo hubiera pensado, sino por la edad, cosa que quizás pueda representar algo sobre los valores quechua en cuanto a “más grande”. Jugando juntos, llegaron a hacer sumas hasta cuatro puntos (los miles) sin equivocarse. Además, pasaron su recreo jugando con la matemática, con ganas de hacerlo.

La *taptana* enfatiza que hay varios algoritmos para hacer la aritmética, y refuerza la noción de cero en la primera posición, por ejemplo que 023 es lo mismo como 23. Cuando el estudiante quiere sumar un número de tres puntos con un número de dos, se da cuenta de que el valor de cien en el segundo número es nada, o cero. También aprende sobre la base

diez y cómo partir un número en sus componentes de diez. Finalmente, el estudiante sigue conociendo maneras de registrar información sin la escritura, ampliando sus pensamientos sobre la variedad de modos para procesar datos.

## II. Los *quipus*

El jueves 24-04, di una breve lección a los estudiantes de quinto-sexto sobre cómo leer números de las cuerdas de un *quipu*. A todos les parecía muy fácil, excepto a una niña que siempre había tenido problemas con valor posicional. Esta niña se frustraba mucho, empezando a adivinar y rendirse, pero su profesor trabajaba con ella muy pacientemente hasta que, de un momento a otro, la estudiante empezó a poder hacer todos los ejemplos por si misma. Para ella, esta lección de *quipus* era la primera vez que realmente empezó a entender el valor posicional. La próxima lección, ella hizo todas las representaciones de los números en las cuerdas sin ningún problema, y muy contenta con lo que había logrado.

El lunes 28-04, enseñé la segunda clase sobre los *quipus* a los estudiantes de quinto-sexto. Empecé con un problema que escribí en la pizarra: “Hay dos familias, la de Luisa y la de Jorge. La familia de Luisa tiene 134 Kg de maíz, 379 Kg de papa, y 15 Kg de trigo. La familia de Jorge tiene 208 Kg de maíz, 981 Kg de papa, y 73 Kg de trigo. Quieren registrar esta información.” Dibujé una tabla vacía en la pizarra, y los estudiantes la llenaron con la información que había puesto.

	Luisa	Jorge
Maíz	134	208
Papa	379	981
Trigo	15	73

El problema entonces era traducir esta información en un *quipu*. Armé un *quipu* vacío en la pizarra, en que expliqué que necesitábamos dos grupos de tres colores y por qué. Los estudiantes vinieron a la pizarra para dibujar los nudos y completar el *quipu*.

Después de entender como hacer estos tipos de problemas, les di otro. Puse una tabla en la pizarra con filas para “hermanos” y “hermanas” y cinco columnas, para cada estudiante. Les pedí que llenen su propio número de hermanos y hermanas. No pensé que esta parte sería la difícil, pero algunos de los estudiantes no lo sabían. Les pedí sus mejores adivinanzas, y llegamos al final a esto (los nombres han sido cambiados):

	Luisa	Ingrid	Willy	Carlos	Jorge
Hermanos	1	6	2	3	1
Hermanas	3	8	2	1	1

Repártí a cada niño un conjunto de hilos, para que hicieran sus propios *quipus*. Como escribió Inca Garcilaso, “Las letras perpetúan los hechos, más como aquellos Incas no las alcanzaron valiéronse de lo que pudieron inventar. Y como si los nudos fueron letras eligieron historiadores y contadores, para que por ellos- y por los hilos y por los colores de hilos y con el favor de los cuentos y de la poesía- escribiesen y retuviesen la tradición de sus hechos. Esta fue la manera de escribir que los incas tuvieron en su república.” (Río... 15) Armandando sus propios quipus, los estudiantes estaban reviviendo las tradiciones no sólo de la matemática sino de la alternativa que los incas tenían para escribir. Estos nudos funcionaban como letras o números que registraban información. Mis estudiantes aprendieron maneras alternativas de pensar sobre la estadística, nuevos algoritmos para procesar información, y también historia de la escritura. Podían ver cómo empezaron sus antepasados a pensar sobre la comunicación, no con lapiceros y papel sino con un sistema centralizado de cuerdas y nudos.

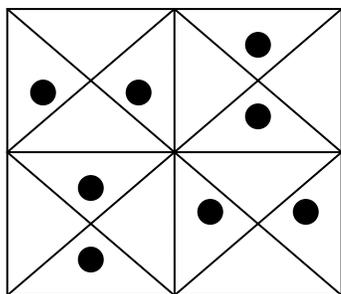
### III. Los *tokapus*

Varias veces en clases y aun durante el recreo miraba a estudiantes dibujando *tokapus* con colores en hojas de papel. El *tokapu* es mucho más que un bonito diseño (aunque seguro que sí es esto), es también una lección en la geometría, desarrollando para los artistas los conceptos de forma, igualdad de tamaño, simetría y rotación, series, secuencias, y la infinitud. Tomamos uno por uno:

**LAS FORMAS:** El *tokapu* enseña una variedad de formas, incluyendo rectángulos, cuadrados, triángulos, rombos y círculos, y les ayuda a los niños descubrir cómo formar estas formas de otras. Por ejemplo, los niños ven que dividiendo un rectángulo o rombo por la mitad con una línea, se llega a dos triángulos, y que dividiendo con una línea un triángulo, se forma dos triángulos también, con diferentes ratios de lados.

**IGUALDAD DE TAMAÑO:** Con los *tokapus*, estudiantes aprenden cómo dividir las formas (especialmente los cuadrados o rectángulos) en partes iguales. Después, pueden aplicar este conocimiento a otras formas como círculos (recuerden de la lección de la *taptana*) también, y es una introducción fácil y divertida a lo que son las fracciones. Uno de las principales actividades con los *tokapus* dibujados es dividir los primeros cuadrados en partes iguales, que sea con líneas rectas, diagonales, escaleras, etc., para poder copiar los diseños de un lado al otro.

**SIMETRÍA Y ROTACIÓN:** Los *tokapus* desarrollan los conceptos de la simetría y rotaciones porque cada diseño está reflejado por lo menos una vez sobre un eje (horizontal, vertical o diagonal) en un cuadrado, y este cuadrado también está reflejado sobre el mismo o diferente eje un número de veces para producir el diseño final.



Aquí tenemos un ejemplo de un *tokapu* hecho por un estudiante de quinto grado, que muestra varias líneas de simetría y rotación. Cada cuadrada interior tiene simetría sobre los ejes horizontales y verticales, y el *tokapu* en total tiene simetría sobre la línea diagonal. Para llegar del cuadrado (1,1) hasta (1,2) empleó una rotación sobre la línea diagonal, una vuelta de noventa grados, y después una rotación sobre la línea vertical. Para llegar del cuadrado (1,1) a (2,1) también hizo una rotación de noventa grados, que después volteó sobre la línea horizontal.

SERIES, SECUENCIAS, Y LA INFINIDAD: Como vemos en el ejemplo anterior, los *tokapus* se construyen por una secuencia de rotaciones y revoluciones, que hace que el *tokapu* crezca con una serie de diseños. Los estudiantes se dan cuenta del serie que emplean, y que podrían continuar este serie para siempre, sin fin. Así se empiezan a entender el concepto de la infinidad.

#### IV. La *yupana*

No observé ni di una clase de la *yupana* a los estudiantes de Wiñaypaq, pero observé sus propias *yupanas* colgando de una pared del aula, y los profesores me contaron que trabajaron con la *yupana* como herramienta para el aprendizaje de la aritmética. La *yupana*, descrito en una publicación por la Universidad Pedagógica Nacional, “es un ejemplo de lo histórico como elemento pedagógico, pues es innegable su valioso aporte a la matemática y a la pedagogía, a la primera porque rescata el verdadero sentido de multiplicar y dividir; además, motiva la creación de nuevos algoritmos que faciliten las operaciones aritméticas y otros posibles usos a este artefacto y por último familiariza al usuario u operario con la representación numérica real de una cifra, el valor posicional de columnas, el manejo de operaciones,... y lo induce a la idea de calcular (proviene del latín *calculus* que significa piedrecilla).” (Mora, et. al. 155) Como las lecciones de la *taptana*,

*quipu*, y *tokapus*, las *yupanas* les dan a los niños un modo de pensar sobre conceptos de nuevas formas y usando nuevos algoritmos, entonces llegando a un conocimiento más amplio y fuerte. La *yupana* no ha enseñado a los estudiantes cómo sumar y restar sino les ha reesforzado y clarificado su idea de que en realidad son estos procesos. En esta manera los estudiantes llegan a seguir la matemática pura con la matemática aplicada, un resultado muy importante que muchas veces nunca se realiza.

## CONCLUSIONES

¿Y qué? ¿Por qué reclamar métodos antiguos de hacer la matemática? Espero haber mostrado que estos métodos, aunque sean antiguos, siguen siendo relevantes a la realidad de hoy. Para muchos estudiantes quechuas, que hablan el lenguaje quechua y que viven las tradiciones de sus antepasados, métodos antiguos les ayudan a interactuar con la matemática en el aula como han aprendido hacerlo en el hogar. Para ellos, estos métodos hablan a los hechos que han descubierto en su vida diaria, y a su manera específica de pensar. En las chakras, la naturaleza les han enseñado sobre la geometría; profesores pueden tomar este conocimiento y elaborarlo hasta llegar a conceptos abstractos y teóricos. Todos crecen dentro de una cultura y con un lenguaje que guían su manera de ver el mundo. Por eso, es importante que el aprendizaje tome en cuenta la cultura específica del estudiante. En vez de sentarse aburridos y tomar notas de conceptos abstractos que tampoco entiendan, los estudiantes de Wiñaypaq tienen la oportunidad de jugar con la matemática, viviendo las tradiciones de sus antepasados y descubriendo los conceptos para si mismo. Con diferentes métodos de hacer las mismas aplicaciones, los estudiantes llegan a conocer una variedad de algoritmos y llegan a un conocimiento de la matemática mucho más amplia. La etnomatemática les da confianza para aprender y relevancia a conceptos

abstractos. Integra historia con cultura, lenguaje, juego, y arte, a la vez enseñando el currículo nacional pero de un modo vinculado a la realidad de la comunidad. Una escuela exitosa comparte con los niños todas sus experiencias, siendo un lugar para compartir la vida diaria y llegar a entenderla de maneras más profundas. Cuando los niños de Wiñaypaq cosechan papas, no están pensando en sus clases de matemática, pero las clases de matemática, para que sean realmente prósperas, sí tienen que pensar en la cosecha. Siempre hay que recordar que niños vienen a la escuela ya con sus vidas individuales, ya con una historia de experiencias que les han preparado para aprender. Las clases siempre lograrán más si lleguen a usar estas experiencias para guiar el niño a conocer aun más.

## **Bibliografía**

- (1990). Introducción. *Pueblos indígenas y educación, Volumen 16*.
- (2008). *Acerca de Wiñaypaq*. 08-05-08 de <<http://winaypaq.org/about>>
- Ascher, M., y Ascher, R. (1981). *Code of the Quipu: A study in media, mathematics, and culture*. Ann Arbor, Mich.: University of Michigan Press.
- Ascher, M. (1988). Ideas matemáticas de los incas. *Pueblos indígenas y educación* (8), 41-70.
- Ascher, M. (1991). *Ethnomathematics: A Multicultural View of Mathematical Ideas*. Pacific Grove, Calif.: Brooks/Cole.
- Burns, G. W. *La tabla de cálculo de los incas*. Boletín de Lima. Lima.
- Gilsdorf, T. E. (2000). Inca mathematics. En Selin, H (ed.), *Mathematics across cultures: The history of non-western mathematics (189-205)*. Kluwer Academic Publishers.
- Lipka, J. (1994). Culturally negotiated schooling: Toward a Yup'ik mathematics. *Journal of American Indian Education, Volume 33* (3).
- Mora, L. C., y Valero, N. La yupana como herramienta pedagógica en la primaria. *Universidad Pedagógica Nacional*. 05-05-08 de <<http://www.pedagogica.edu.co>>
- Moscovich, V. (2006). Yupana, tabla de contar inca. *Revista Andina 43*. Cuzco: CBC.
- Pilares Casas, G. A. (2005). Los sistemas numéricos del quechua y el aimara. *Dirección Nacional de Educación Bilingüe*. Lima.
- Sáenz, O. (2007). *Novedoso manual del área de lógico matemático: Educación primaria del primero al sexto*. Lima.
- Ubillús, M. (1995). *La matemática en la educación bilingüe*. Lima.
- Urton, G. (2003). *La vida social de los números: Una ontología de los números y la filosofía de la aritmética quechua*. Cuzco: CBC. (Original publicado en 1997)
- Warmayllu/ Comunidad de niños (2005). *El río de la tradición oral: Pedagogía intercultural a través del arte y la oralidad*. Lima.